ACADEMIA ROMÂNĂ
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ”SIMION STOILOW”

TEZĂ DE DOCTORAT

REZUMAT

APLICAŢII ALE METODEI OMOGENIZĂRII ÎN PROBLEME DE DIFUZIE

Coordonator Ştiinţific,

Prof. Univ. Dr. Horia ENE

DOCTORAND,

Nicolae - Iulian ŢENŢEA

Bucureşti, 2014

Cuprins

Introducere

Scopul acestei lucrări este aplicarea metodei omogenizării la unele probleme de elasticitate, respectiv termoelasticitate, formulate într-un mediu alcătuit din două componente. Sunt studiate diverse cazuri în funcţie de condiţiile pe interfaţa dintre cele două componente ale domeniului şi de structura mediului pe care îl ocupă acesta.

Referitor la domeniul considerat, este vorba de un deschis Ω din $\mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 2$), cu frontiera $\partial\Omega$ continuă Lipschitz, descris la începutul Capitolului 1, care ocupă un mediu cu structură periodică, format din două componente, una conexă iar cealaltă neconexă, interfaţa dintre ele având proprietăţile potrivite pentru formularea problemelor studiate în această lucrare. Mai exact, se consideră $Y = (0,1)^N$ cubul unitate din $\mathbb{R}^N$ şi presupunem că Y_2 este o submulţime a lui Y astfel încât $\bar{Y}_2 \subset Y$ şi frontiera sa Γ este de asemenea continuă Lipschitz. Definim $Y_1 = Y \setminus \bar{Y}_2$ şi se poate observa uşor că repetând Y prin periodicitate, reuniunea tuturor $\bar{Y}_1$ formează un domeniu conex din $\mathbb{R}^N$ care va fi notat $\mathbb{R}^N_1$. De asemenea, $\mathbb{R}^N_2 = \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^N_1$.

În cele ce urmează, parametrul $\varepsilon \in (0,1)$ reprezintă dimensiunea celulei de periodicitate şi va lua valori într-un şir de numere reale care, în procesul de omogenizare, va converge către zero. Pentru fiecare $k \in \mathbb{Z}^N$ definim $Y^k = k + Y$ şi $Y^k_\alpha = k + Y_\alpha$, unde $\alpha \in \{1,2\}$. De asemenea, pentru fiecare ε, fie $\mathbb{Z}_\varepsilon = \left\{k \in \mathbb{Z}^N : \ \varepsilon\bar{Y}^k_2 \subset \Omega\right\}$ şi introducem mulţimile

$$\Omega^\varepsilon_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon} \left(\varepsilon Y^k_2\right) \ \text{ şi } \ \Omega^\varepsilon_1 = \Omega \setminus \bar{\Omega}^\varepsilon_2,$$

care reprezintă cele două componente ale domeniului Ω. Frontiera lui Ω^ε_2 va fi notată prin Γ_ε şi n va reprezenta normala pe Γ_ε, exterioară lui Ω^ε_1. Interfaţa Γ_ε reprezintă de fapt un înveliş format dintr-un material fin care împrejmuieşte particulele acesta fiind modelat ca o suprafaţă.

Pentru omogenizarea problemelor considerate se foloseşte metoda *unfolding* introdusă de Ciorănescu, Damlamian şi Griso în [5] care, mai târziu, a fost extinsă la domenii perforate periodic de către Cioranescu, Damlamian, Donato, Griso şi Zaki în [9] şi [7]. În [12] Donato *et al.* folosesc metoda unfolding pentru un domeniu cu două componente similar celui considerat în această lucrare. Mai târziu, Donato şi Yang folosesc în [15] un operator unfolding care depinde şi de timp, pentru o ecuaţie de unde, intr-un domeniu perforat. În [38], Yang defineşte doi operatori unfolding care depind de timp, pe un domeniu similar celui considerat în această lucrare.

În ceea ce priveşte structura lucrării, aceasta este împărţită în patru capitole. În prima parte a Capitolului 1 este descris domeniul, după care se studiază o problemă de elasticitate. Se consideră că mediul are dublă porozitate, mai exact elasticitatea componentei neconexe este de ordinul ε^2. De asemenea, pe interfaţa dintre cele două componente ale mediului, se consideră un salt al vectorului deplasărilor, proporţional cu componenta normală a tensorului tensiunilor care este presupusă continuă. După scrierea problemei în formă variaţională şi obţinerea estimărilor *a priori* se demonstrează rezultate de convergenţă şi se obţine problema omogenizată cuplată prin trecere la limită după ε, după care se decuplează problema obţinută cu introducându-se coeficienţii omogenizaţi şi soluţiile problemelor locale. Deşi tensorul de ordinul ε^2 din componenta neconexă nu apare în cadrul tensorului omogenizat, el îşi face simţită prezenţa în mod indirect în componenţa soluţiei problemei limită prin intermediul problemelor locale formulate în componenta Y_2 a celulei unitate Y.

Urmatoarele trei capitole sunt dedicate unor probleme de termoelasticitate cu condiţii iniţiale nule. Mai exact se studiază difuzia temperaturii într-un mediu elastic ocupat de domeniul Ω definit în Capitolul 1. Sunt abordate diferite cazuri în funcţie de condiţiile considerate pe interfaţa dintre componentele domeniului şi de forma tensorului de elasticitate a componentei neconexe. În mod similar Capitolului 2, se obţin problemele omogenizate corespunzătoare fiecărui model termoelastic propus, în cadrul cărora se poate observa o îmbinare a rezultatelor de omogenizare de la o problemă de elasticitate cu cele ale unei probleme de difuzie.

Mai exact, în Capitolul 2 se studiază modelul clasic de termoelasticitate la care se adaugă condiţiile de salt atât în deplasări cât şi în temperaturi, pe interfaţa dintre componentele domeniului. Problema omogenizată obţinută aici este similară problemei termoelastice iniţiale, diferenţele constând în prezenţa unor termeni de cuplaj între limitele u^1 şi u^2, respectiv θ^1 şi θ^2. De asemenea tensorii ce descriu componenta neconexă nu apar în problema omogenizată.

În cadrul Capitolului 3 se analizează aceeaşi problemă însă se consideră din nou că elasticitatea componentei neconexe este de ordinul ε^2. În plus, tensorul temperatură deplasare şi densitatea componentei neconexe sunt de ordinul ε. De data aceasta, spre deosebire de cazurile precedente, tensorii care descriu componenta neconexă apar în problema omogenizată, mai exact îşi fac simţită prezenţa în ecuaţia omogenizată a temperaturii, rezultată din trecerea la limită pe componenta neconexă. Ca în Capitolul 1, aceştia apar şi în cadrul soluţiei problemei limită prin intermediul problemelor locale formulate în componenta Y_2 a celulei unitate Y. În plus, ca şi în Capitolul 1 se observă că termenul de cuplaj al limitelor u^1 şi u^2 ce descriu deplasările, nu mai există în acest caz.

Ultimul model din această lucrare se studiază în Capitolul 4. De această dată, se consideră că doar deplasările au un salt pe interfaţa dintre cele două componente ale mediului, componenta neconexă a acestuia având de asemenea elasticitatea de ordin ε^2, iar densitatea şi tensorul temperatură deplasare fiind de ordinul ε. Diferenţa dintre acest model şi cel din Capitolul 3 constă, aşa cum era de aşteptat, în lipsa termenului de cuplaj al limitelor ce descriu temperaturile.

Modelele propuse în această teză nu au mai fost tratate până acum astfel că rezultatele expuse aici sunt originale ele fiind obţinute în urma activităţii proprii de cercetare.

1 Omogenizarea unui mediu elastic cu dublă porozitate şi interfaţă imperfectă

În cadrul acestui capitol se studiază o problemă de elasticitate formulată într-un mediu cu dublă porozitate care ocupă domeniul Ω. Pe interfaţa Γ_ε se consideră o condiţie de salt al vectorului deplasărilor, proporţional cu componenta normală a tensorului tensiunilor care este presupusă continuă. Mai exact, se consideră problema

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \sigma_{ij}^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_j} = g_i \quad \text{în } \Omega_\alpha^\varepsilon, \quad \alpha \in \{1,2\}, \\ \sigma_{ij}^{1\varepsilon} n_j = \sigma_{ij}^{2\varepsilon} n_j = \varepsilon h_\varepsilon (u_i^{2\varepsilon} - u_i^{1\varepsilon}) \quad \text{pe } \Gamma_\varepsilon, \\ u^{1\varepsilon} = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

unde $h_\varepsilon(x) = h(x/\varepsilon)$ reprezintă factorul de salt iar $\sigma_{ij}^{\alpha\varepsilon} = a_{ijkh}^{\alpha\varepsilon} e_{kh}(u^{\alpha\varepsilon})$ sunt componentele tensorilor tensiune. Funcţiile $e_{kh}(u^{\alpha\varepsilon}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_k}\right)$ reprezintă componentele tensorului de deformare iar $a_{ijkh}^{\varepsilon\alpha}$ sunt componentele tensorilor de elasticitate definiţi astfel:

$$A^{1\varepsilon}(x) = A^1(x/\varepsilon) \;\text{ şi }\; A^{2\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 A^2(x/\varepsilon). \tag{1.2}$$

Considerăm că h şi componentele a_{ijkh}^α ale tensorilor simetrici şi pozitiv definiţi A^α, sunt funcţii netede, Y- periodice şi mărginite şi de asemenea $h(y) > 0$ pe Γ. Introducem spaţiul $V_\varepsilon = \left\{v \in H^1(\Omega_1^\varepsilon),\ v = 0 \text{ pe } \partial\Omega\right\}$ înzestrat cu norma L^2 a gradienţilor şi spaţiul Hilbert

$$H_\varepsilon = V_\varepsilon^N \times H^1(\Omega_2^\varepsilon)^N \tag{1.3}$$

înzestrat cu produsul scalar

$$(u,v)_{H_\varepsilon} = \int_{\Omega_1^\varepsilon} \nabla u_i^1 \nabla v_i^1 + \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} \nabla u_i^2 \nabla v_i^2 + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} (u_i^2 - u_i^1)(v_i^2 - v_i^1), \tag{1.4}$$

unde elementele lui H_ε sunt notate $u = (u^1, u^2)$. Formularea variaţională a problemei (1.1) este:

Să se găsească $u^\varepsilon \in H_\varepsilon$ astfel încât

$$a(u^\varepsilon, v) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} a_{ijkh}^{\alpha\varepsilon} \frac{\partial u_k^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_j} + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon (u_i^{2\varepsilon} - u_i^{1\varepsilon})(v_i^2 - v_i^1) = \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_i v_i^1 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_i v_i^2, \quad \forall v \in H_\varepsilon. \tag{1.5}$$

Teorema 1.1. *Pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$, problema (1.5) are o soluţie unică $u^\varepsilon \in H_\varepsilon$. Mai mult, există o constantă $C > 0$ independentă de ε astfel încât, pentru $\alpha \in \{1,2\}$ şi fiecare $i = 1, \ldots, N$, avem*

$$\|u_i^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega_\alpha^\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \|\nabla u_i^{1\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \varepsilon \|\nabla u_i^{2\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \|u_i^{2\varepsilon} - u_i^{1\varepsilon}\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-1/2}. \tag{1.6}$$

Pentru o mulţime dată $D \subset \mathbb{R}^N$ şi $v \in L^1(D)$, notăm $\langle v \rangle_D = \frac{1}{|D|}\int_D v(y)\,dy$ iar dacă v este o funcţie definită pe $\Omega_\alpha^\varepsilon$, $\alpha \in \{1,2\}$, atunci $\tilde{v}$ va fi prelungirea cu zero la întreg Ω. În continuare definim spaţiile:

$$H_{per}^1(Y_\alpha) = \left\{v \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_\alpha^N):\ v \text{ este } Y\text{-periodică}\right\}, \qquad \tilde{H}_{per}^1(Y_\alpha) = \left\{v \in H_{per}^1(Y_\alpha):\ \langle v \rangle_Y = 0\right\},$$

$$V = H_0^1(\Omega)^N \times L^2\left(\Omega; H_{per}^1(Y_1)\right)^N \times L^2\left(\Omega; H^1(Y_2)\right)^N.$$

Folosind metoda unfolding, demonstrăm câteva rezultate de convergenţă şi obţinem problema omogenizată cuplată (în variabilele x şi y).

Teorema 1.2. *Dacă $u^\varepsilon = (u^{1\varepsilon}, u^{2\varepsilon})$ este soluţia problemei (1.1), atunci*

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}^{1\varepsilon} \rightharpoonup |Y_1| \cdot u^1 \quad \textit{slab în} \quad L^2(\Omega)^N, \\
&\tilde{u}^{2\varepsilon} \rightharpoonup |Y_2| \cdot \left\langle \widehat{u}^2 \right\rangle_{Y_2} \quad \textit{slab în} \quad L^2(\Omega)^N, \\
&\mathcal{T}_1^\varepsilon(u^{1\varepsilon}) \longrightarrow u^1 \quad \textit{tare în} \quad L^2\left(\Omega; H^1(Y_1)\right)^N, \\
&\mathcal{T}_2^\varepsilon(u^{2\varepsilon}) \rightharpoonup \widehat{u}^2 \quad \textit{slab în} \quad L^2(\Omega; H^1(Y_2))^N, \\
&\mathcal{T}_1^\varepsilon(e_{kh}(u^{1\varepsilon})) \rightharpoonup e_{kh}(u^1) + e^y_{kh}(\widehat{u}^1) \quad \textit{slab în} \quad L^2(\Omega \times Y_1), \\
&\varepsilon \mathcal{T}_2^\varepsilon(e_{kh}(u^{2\varepsilon})) \rightharpoonup e^y_{kh}(\widehat{u}^2) \quad \textit{slab în} \quad L^2(\Omega \times Y_2),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

unde tripletul $(u^1, \widehat{u}^1, \widehat{u}^2) \in V$ cu $\left\langle \widehat{u}^1_i \right\rangle_\Gamma = 0$ a.p.t. pe Ω, este unica soluţie a problemei

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times Y_1} a^1_{ijkh} \left(\frac{\partial u^1_k}{\partial x_h} + \frac{\partial \widehat{u}^1_k}{\partial y_h} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi^1_i}{\partial y_j} \right) + \int_{\Omega\times Y_2} a^2_{ijkh} \frac{\partial \widehat{u}^2_k}{\partial y_h} \frac{\partial \Phi^2_i}{\partial y_j} + \int_{\Omega\times\Gamma} h(\widehat{u}^2_i - u^1_i)(\Phi^2_i - \varphi_i) = \\
= \int_{\Omega\times Y_1} f_i \varphi_i + \int_{\Omega\times Y_2} f_i \Phi^2_i, \quad \forall (\varphi, \Phi^1, \Phi^2) \in V.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Problema omogenizată în Ω se obţine introducând în (1.8) expresiile funcţiilor $\widehat{u}^1$, respectiv $\widehat{u}^2$ şi folosind formula coeficieţilor omogenizaţi a^*_{ijlm}. Mai exact

$$\widehat{u}^1_k(x,y) = w^{lm}_{1k}(y) \cdot \frac{\partial u^1_l}{\partial x_m}(x) \quad \text{în } \Omega \times Y_1, \tag{1.9}$$

$$\widehat{u}^2_k(x,y) = u^1_k(x) + f_l(x) w^l_{2k}(y) \quad \text{în } \Omega \times Y_2, \tag{1.10}$$

$$a^*_{ijlm} = \int_{Y_1} a^1_{ijlm} + a^1_{ijkh} \frac{\partial w^{lm}_{1k}}{\partial y_h}, \tag{1.11}$$

unde pentru $l, m = 1, \dots N$, $w^{lm}_1 \in \tilde{H}^1_{per}(Y_1)^N$ şi $w^l_2 \in H^1(Y_2)^N$ sunt soluţiile unice ale problemelor locale

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big(a^1_{ijlm} + a^1_{ijkh} \dfrac{\partial w^{lm}_{1k}}{\partial y_h} \Big) = 0 \quad \text{în } Y_1 \\ \Big(a^1_{ijlm} + a^1_{ijkh} \dfrac{\partial w^{lm}_{1k}}{\partial y_h} \Big) n_j = 0 \quad \text{pe } \Gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big(a^2_{ijkh} \dfrac{\partial w^l_{2k}}{\partial y_h} \Big) = \delta_{il} \quad \text{în } Y_2 \\ a^2_{ijkh} \dfrac{\partial w^l_{2k}}{\partial y_h} n_j = h w^l_{2i} \quad \text{pe } \Gamma. \end{cases} \tag{1.12}$$

Teorema 1.3. *Dacă $u^\varepsilon \in H_\varepsilon$ este soluţia problemei (1.5), atunci*

$$\tilde{u}^{1\varepsilon} \rightharpoonup |Y_1| \cdot u^1 \quad \textit{slab în} \quad L^2(\Omega)^N, \tag{1.13}$$

$$\tilde{u}^{2\varepsilon} \rightharpoonup |Y_2| \cdot u^1 + f_l \cdot q^l \quad \textit{slab în} \quad L^2(\Omega)^N, \tag{1.14}$$

unde u^1 este unica soluţie a problemei

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(a^*_{ijkh} \dfrac{\partial u^1_k}{\partial x_h} \Big) = f_i \quad \textit{în } \Omega \\ u = 0 \quad \textit{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

şi componentele câmpului q^l sunt $q^l_i = \displaystyle\int_{Y_2} w^l_{2i}$.

2 Modelul termoelastic cu salt în deplasări şi temperaturi, într-un mediu format din două componente

Începând cu acest capitol, ne vom concentra asupra unei probleme de termoelasticitate având condiţii iniţiale nule, formulată în domeniul Ω definit în Capitolul 1. Se consideră doi factori de salt $h^u_\varepsilon(x) = h^u(x/\varepsilon)$ respectiv

$h_\varepsilon^\theta(x) = h^\theta(x/\varepsilon)$ şi tensorii de elasticitate $A^{\alpha\varepsilon}(x) = A^\alpha(x/\varepsilon)$ unde h^u, $h^\theta \in L^\infty(\Gamma)$ şi componentele $a_{ijkh}^\alpha \in L^\infty(Y)$ ale tensorilor simetrici si pozitiv definiţi A^α sunt funcţii reale, netede, Y- periodice.

Introducem de asemenea tensorii temperatură-deplasare de ordinul al doilea $B^{1\varepsilon}(x) = B^1(x/\varepsilon)$ şi $B^{2\varepsilon}(x) = \varepsilon B^2(x/\varepsilon)$ şi tensorii conductivitate termică $K^{\alpha\varepsilon}(x) = K^\alpha(x/\varepsilon)$ unde B^α şi K^α sunt simetrici, K^α fiind în plus pozitiv definiţi, ale căror componente b_{ij}^α, k_{ij}^α sunt de asemenea funcţii netede, Y-periodice din $L^\infty(Y)$. Mai departe, T_0 desemnează temperatura de referinţă, $\rho^{\alpha\varepsilon}(x) = \rho^\alpha(x/\varepsilon)$ reprezintă densităţile celor două medii, iar $c^{\alpha\varepsilon}(x) = c^\alpha(x/\varepsilon)$ este căldura specifică la deformare constantă a fiecărui mediu, funcţiile $\rho^\alpha, c^\alpha \in L^\infty(Y)$ fiind şi ele considerate netede, Y-periodice şi evident strict pozitive. Pentru $\alpha \in \{1,2\}$, dacă $u^{\alpha\varepsilon}$ şi $\theta^{\alpha\varepsilon}$ sunt funcţii definite pe $\Omega_\alpha^\varepsilon$ definim legile constitutive $\sigma_{ij}^{\alpha\varepsilon} = a_{ijkh}^{\alpha\varepsilon} e_{kh}(u^{\alpha\varepsilon}) - b_{ij}^{\alpha\varepsilon}\theta^{\alpha\varepsilon}$.

Problema studiată în acest capitol este reprezentată de ecuaţiile (2.1)-(2.1) şi condiţiile (2.3)-(2.6):

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_j} + \rho^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial^2 u_i^{\alpha\varepsilon}}{\partial t^2} = f_i \quad \text{pe } \Omega_\alpha^\varepsilon, \tag{2.1}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(k_{ij}^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial \theta^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_j}\Big) + T_0 b_{ij}^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial e_{ij}(u^{\alpha\varepsilon})}{\partial t} + c^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial \theta^{\alpha\varepsilon}}{\partial t} = r \quad \text{pe } \Omega_\alpha^\varepsilon, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{ij}^{1\varepsilon} n_j = \sigma_{ij}^{2\varepsilon} n_j = \varepsilon h_\varepsilon^u (u_i^{2\varepsilon} - u_i^{1\varepsilon}) \quad \text{pe } \Gamma_\varepsilon, \tag{2.3}$$

$$k_{ij}^{1\varepsilon}\frac{\partial \theta^{1\varepsilon}}{\partial x_j} n_i = k_{ij}^{2\varepsilon}\frac{\partial \theta^{2\varepsilon}}{\partial x_j} n_i = \varepsilon h_\varepsilon^\theta(\theta^{2\varepsilon} - \theta^{1\varepsilon}) \quad \text{pe } \Gamma_\varepsilon, \tag{2.4}$$

unde f_i sunt componentele câmpului vectorial $f \in L^2(\Omega)^N$ care reprezintă forţele masice, iar $r \in L^2(\Omega)$ sursa de energie exterioară. În plus, impunem condiţii pe frontiera $\partial\Omega$,

$$u^{1\varepsilon} = 0, \quad \theta^{1\varepsilon} = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega, \tag{2.5}$$

şi condiţii iniţiale nule, adică

$$u^{\alpha\varepsilon}(0,x) = 0, \quad \dot{u}^{\alpha\varepsilon}(0,x) = 0, \quad \theta^{\alpha\varepsilon}(0,x) = 0. \tag{2.6}$$

2.1 Formularea variaţională a problemei şi estimări a priori

Fie T un număr real strict pozitiv. În continuare, vom folosi notaţiile $\Omega_T = [0,T]\times\Omega$, $\Omega_{T\alpha}^\varepsilon = [0,T]\times\Omega_\alpha^\varepsilon$ şi $\Gamma_\varepsilon^T = [0,T]\times\Gamma_\varepsilon$ şi introducem spaţiile

$$V_{1\varepsilon} = \left\{ v \in C^\infty(0,T;H^1(\Omega_1^\varepsilon)),\ v = 0 \text{ pe } \partial\Omega \text{ şi } v = 0 \text{ pe } \{0\}\times\Omega \right\},$$

$$V_{2\varepsilon} = \left\{ v \in C^\infty(0,T;H^1(\Omega_2^\varepsilon)),\ v = 0 \text{ pe } \{0\}\times\Omega \right\},$$

$$W_\varepsilon = \left(V_{1\varepsilon}^N \times V_{2\varepsilon}^N\right) \times (V_{1\varepsilon}\times V_{2\varepsilon}). \tag{2.7}$$

Un element al lui W_ε va fi notat $V = (v,w)$ unde $v = (v^1,v^2) \in V_{1\varepsilon}^N \times V_{2\varepsilon}^N$ şi $w = (w^1,w^2) \in V_{1\varepsilon}\times V_{2\varepsilon}$. În acest spaţiu se introduce formularea slabă a problemei (2.1)-(2.6) şi anume:

Să se găsească $U^\varepsilon = (u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \in W_\varepsilon$ astfel încât

$$\mathcal{L}_\varepsilon(U^\varepsilon, V) = \mathcal{D}_\varepsilon\left((f,r),V\right),\ \forall V = (v,w) \in W_\varepsilon, \tag{2.8}$$

unde, pentru fiecare ε, $\mathcal{L}_\varepsilon : W_\varepsilon \times W_\varepsilon \to \mathbb{R}$ este o formă biliniară definită prin

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\varepsilon(U,V) = {}& \sum_{\alpha=1,2}\Bigg[\int_0^T\!\!\int_{\Omega_\alpha^\varepsilon}(t-T)\Big(\left(-a_{ijkh}^{\alpha\varepsilon}e_{kh}(u^\alpha) + b_{ij}^{\alpha\varepsilon}\theta^\alpha\right)e_{ij}(\dot{v}^\alpha) + \rho^{\alpha\varepsilon}\dot{u}_i^\alpha\ddot{v}_i^\alpha + + b_{ij}^{\alpha\varepsilon}e_{ij}(u^\alpha)\dot{w}^\alpha + \\
& + \frac{1}{T_0}c^{\alpha\varepsilon}\theta^\alpha\dot{w}^\alpha\Big) + \rho^{\alpha\varepsilon}\dot{u}_i^\alpha\dot{v}_i^\alpha + b_{ij}^{\alpha\varepsilon}e_{ij}(u^\alpha)w^\alpha + \frac{1}{T_0}c^{\alpha\varepsilon}\theta^\alpha w^\alpha + \frac{1}{T_0}\int_0^t k_{ij}^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x_i}\,\mathrm{d}s\Bigg] - \\
& -\varepsilon\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_\varepsilon}(t-T)h_\varepsilon^u(u_i^2-u_i^1)(\dot{v}_i^2-\dot{v}_i^1) - \frac{\varepsilon}{T_0}\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_\varepsilon}(t-T)h_\varepsilon^\theta(\theta^2-\theta^1)(w^2-w^1),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

cu $U = (u,\theta)$ şi $V = (v,w)$, iar $\mathcal{D}_\varepsilon : \left(L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)\right)\times W_\varepsilon \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\mathcal{D}_\varepsilon\left((f,r),V\right) = -\sum_{\alpha=1,2}\int_0^T\!\!\int_{\Omega_\alpha^\varepsilon}(t-T)\Big(f_i\dot{v}_i^\alpha + \frac{1}{T_0}rw^\alpha\Big). \tag{2.10}$$

Introducem acum spaţiul Hilbert $\mathcal{W}_\varepsilon$ obţinut prin completarea lui W_ε în norma $\|\cdot\|$ generată de produsul scalar

$$\begin{aligned}(U,V)_{W_\varepsilon} = & \sum_{\alpha=1,2}\left[\int_0^T\!\!\int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} u_i^\alpha v_i^\alpha + \dot{u}_i^\alpha \dot{v}_i^\alpha + e_{ij}(u^\alpha)e_{ij}(v^\alpha) + \theta^\alpha w^\alpha + \int_0^t \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x_i}\,\mathrm{ds}\right] \\ & + \varepsilon\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_\varepsilon}(u_i^2-u_i^1)(v_i^2-v_i^1) + \varepsilon\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_\varepsilon}\int_0^t(\theta^2-\theta^1)(w^2-w^1)\,\mathrm{ds}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

şi se poate vedea că $\mathcal{L}_\varepsilon$ poate fi prelungită prin continuitate la întreg spaţiul $\mathcal{W}_\varepsilon \times \mathcal{W}_\varepsilon$, iar $\mathcal{D}_\varepsilon$ poate fi prelungită la $\big(L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)\big) \times \mathcal{W}_\varepsilon$.

Teorema 2.1. *Problema (2.8) are soluţie şi aceasta este unică. Mai mult, există o constantă $C>0$, independentă de ε, pentru care:*

$$\|u_i^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon_{T\alpha})} \leqslant C, \quad \|\dot{u}_i^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon_{T\alpha})} \leqslant C, \quad \|\nabla u_i^{\alpha\varepsilon}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon_{T\alpha})} \leqslant C, \quad \|\theta^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon_{T\alpha})} \leqslant C, \tag{2.12}$$

$$\left\|\int_0^t (\nabla\theta^{\varepsilon\alpha})^2\right\|_{L^1(\Omega^\varepsilon_{T\alpha})} \leqslant C, \quad \|u_i^{2\varepsilon}-u_i^{1\varepsilon}\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon^T)} \leqslant C\varepsilon^{-1/2}, \quad \left\|\int_0^t \big(\theta^{2\varepsilon}-\theta^{1\varepsilon}\big)^2\right\|_{L^1(\Gamma_\varepsilon^T)} \leqslant C\varepsilon^{-1/2}. \tag{2.13}$$

2.2 Procesul de omogenizare

În cadrul acestui pragraf vom folosi notaţia

$$\begin{aligned} W = \; & H^2(0,T;H_0^1(\Omega))^N \times L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1_{per}(Y_1))^N \times H^2(0,T;L^2(\Omega))^N \times \\ & \times H^1(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1_{per}(Y_1)) \times H^1(0,T;L^2(\Omega)).\end{aligned}$$

Teorema 2.2. *Dacă $(u^\varepsilon,\theta^\varepsilon)\in\mathcal{W}_\varepsilon$ este soluţia problemei (2.1)-(2.6), unde $u^\varepsilon=(u^{1\varepsilon},u^{2\varepsilon})$ şi $\theta^\varepsilon=(\theta^{1\varepsilon},\theta^{2\varepsilon})$, atunci*

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}^{\alpha\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} |Y_\alpha|\cdot u^\alpha \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^N,\\
&\tilde{\theta}^{\alpha\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} |Y_\alpha|\cdot \theta^\alpha \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\mathcal{T}^\varepsilon_\alpha(u^{\alpha\varepsilon}) \overset{*}{\rightharpoonup} u^\alpha \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1(Y_\alpha)))^N,\\
&\mathcal{T}^\varepsilon_1(e_{kh}(u^{1\varepsilon})) \overset{*}{\rightharpoonup} e_{kh}(u^1)+e^y_{kh}(\widehat{u}^1) \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times Y_1)),\\
&\mathcal{T}^\varepsilon_2(e_{kh}(u^{2\varepsilon})) \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times Y_2)),\\
&\mathcal{T}^\varepsilon_\alpha(\theta^{\alpha\varepsilon}) \overset{*}{\rightharpoonup} \theta^\alpha \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1(Y_\alpha))),\\
&\mathcal{T}^\varepsilon_1(\nabla\theta^{1\varepsilon}) \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla\theta^1+\nabla_y\widehat{\theta}^1 \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times Y_1)),\\
&\mathcal{T}^\varepsilon_2(\nabla\theta^{2\varepsilon}) \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times Y_2)),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

unde $(u^1,\widehat{u}^1,u^2,\theta^1,\widehat{\theta}^1,\theta^2)\in W$, este unica soluţie a problemei

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)\left[a^1_{ijkh}\Big(e_{kh}(u^1)+e^y_{kh}(\widehat{u}^1)\Big)-b^1_{ij}\theta^1\right]\Big(\dot{e}_{ij}(\varphi^1)+\dot{e}^y_{ij}(\Phi^1)\Big)+\\
&\qquad + \sum_{\alpha=1,2}\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_\alpha}(t-T)\Big[\rho^\alpha\ddot{u}_i^\alpha\dot{\varphi}_i^\alpha+\frac{1}{T_0}c^\alpha\dot{\theta}^\alpha q^\alpha\Big]+\\
&+\frac{1}{T_0}\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)k^1_{ij}\Big(\frac{\partial\theta^1}{\partial x_j}+\frac{\partial\widehat{\theta}^1}{\partial y_j}\Big)\Big(\frac{\partial q^1}{\partial x_i}+\frac{\partial Q^1}{\partial y_i}\Big)+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)b^1_{ij}\Big(\dot{e}_{ij}(u^1)+\dot{e}^y_{ij}(\widehat{u}^1)\Big)q^1+\\
&\qquad + \int_0^T\!\!\int_{\Omega\times\Gamma}(t-T)\Big[h^u(u_i^2-u_i^1)(\dot{\varphi}_i^2-\dot{\varphi}_i^1)+\frac{1}{T_0}h^\theta(\theta_i^2-\theta_i^1)(q_i^2-q_i^1)\Big]=\\
&\qquad = \sum_{\alpha=1,2}\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_\alpha}(t-T)\Big(f_i\dot{\varphi}_i^\alpha+\frac{1}{T_0}rq^\alpha\Big), \qquad \forall(\varphi^1,\Phi^1,\varphi^2,q^1,Q^1,q^2)\in W.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

În plus, pentru $\alpha\in\{1,2\}$ şi penru aproape orice $x\in\Omega$ avem $u^\alpha(0,x)=0$, $\quad\dot{u}^\alpha(0,x)=0$, $\quad\theta^\alpha(0,x)=0$.

Introducem acum soluţiile unice $z^1, w_1^{lm}, \chi^1 \in \tilde{H}^1_{per}(Y_1)^N$ $(l,m=1,\dots,N)$, ale problemelor locale

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big(a^1_{ijkh}\dfrac{\partial z^1_k}{\partial y_h} - b^1_{ij}\Big) = 0 \quad \text{în } Y_1 \\ \Big(a^1_{ijkh}\dfrac{\partial z^1_k}{\partial y_h} - b^1_{ij}\Big)n_j = 0 \quad \text{pe } \Gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big(a^1_{ijlm} + a^1_{ijkh}\dfrac{\partial w^{lm}_{1k}}{\partial y_h}\Big) = 0 \quad \text{în } Y_1 \\ \Big(a^1_{ijlm} + a^1_{ijkh}\dfrac{\partial w^{lm}_{1k}}{\partial y_h}\Big)n_j = 0 \quad \text{pe } \Gamma, \end{cases} \tag{2.16}$$

respectiv

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial y_i}\Big(k^1_{ik} + k^1_{ij}\dfrac{\partial \chi^1_k}{\partial y_j}\Big) = 0 \quad \text{în } Y_1 \\ \Big(k^1_{ik} + k^1_{ij}\dfrac{\partial \chi^1_k}{\partial y_j}\Big)n_i = 0 \quad \text{pe } \Gamma, \end{cases} \tag{2.17}$$

şi se observă că

$$\widehat{u}^1_k(t,x,y) = \frac{\partial u^1_l}{\partial x_m}(t,x)\cdot w^{lm}_{1k}(y) + \theta^1(t,x)\cdot z^1_k(y). \tag{2.18}$$

$$\widehat{\theta}^1(t,x,y) = \frac{\partial \theta^1}{\partial x_k}(t,x)\cdot \chi^1_k(y). \tag{2.19}$$

Definim acum coeficienţii omogenizaţi

$$a^{1*}_{ijlm} = \int_{Y_1} a^1_{ijlm} + a^1_{ijkh}\frac{\partial w^{lm}_{1k}}{\partial y_h}, \qquad b^{1*}_{lm} = \int_{Y_1} b^1_{lm} + b^1_{ij}\frac{\partial w^{lm}_{1i}}{\partial y_j}, \qquad k^{1*}_{ik} = \int_{Y_1} k^1_{ik} + k^1_{ij}\frac{\partial \chi^1_k}{\partial y_j}, \qquad \gamma^{1*} = \int_{Y_1} b^1_{ij}\frac{\partial z^1_i}{\partial y_j}. \tag{2.20}$$

şi se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 2.3. *Dacă* $(u^\varepsilon,\theta^\varepsilon) \in \mathcal{W}_\varepsilon$ *este soluţia problemei* (2.1)-(2.6), *unde* $u^\varepsilon = (u^{1\varepsilon}, u^{2\varepsilon})$ *şi* $\theta^\varepsilon = (\theta^{1\varepsilon}, \theta^{2\varepsilon})$, *atunci pentru* $\alpha \in \{1,2\}$

$$\tilde{u}^{\alpha\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} |Y_\alpha|\cdot u^\alpha \quad \textit{slab* în} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^N, \tag{2.21}$$

$$\tilde{\theta}^{\alpha\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} |Y_\alpha|\cdot \theta^\alpha \quad \textit{slab* în} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.22}$$

unde (u,θ) *cu* $u=(u^1,u^2)$ *şi* $\theta=(\theta^1,\theta^2)$ *este soluţia unică a problemei*

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a^{1*}_{ijkh}\frac{\partial u^1_k}{\partial x_h} - b^{1*}_{ij}\theta^1\Big) + \langle\rho^1\rangle_{Y_1}\frac{\partial^2 u^1_i}{\partial t^2} - H^u(u^2_i - u^1_i) = |Y_1|\, f_i \quad \textit{în } \Omega, \tag{2.23}$$

$$\langle\rho^2\rangle_{Y_2}\frac{\partial^2 u^2_i}{\partial t^2} + H^u(u^2_i - u^1_i) = |Y_2|\, f_i \quad \textit{în } \Omega, \tag{2.24}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(k^{1*}_{ij}\frac{\partial \theta^1}{\partial x_j}\Big) + T_0 b^{1*}_{ij}\frac{\partial e_{ij}(u^1)}{\partial t} + \Big(T_0\gamma^{1*} + \langle c^1\rangle_{Y_1}\Big)\frac{\partial\theta^1}{\partial t} - H^\theta(\theta^2-\theta^1) = |Y_1|\, r \quad \textit{în } \Omega, \tag{2.25}$$

$$\langle c^2\rangle_{Y_2}\frac{\partial\theta^2}{\partial t} + H^\theta(\theta^2_i - \theta^1_i) = |Y_2|\, r \quad \textit{în } \Omega, \tag{2.26}$$

$$u^1 = 0, \quad \theta^1 = 0 \quad \textit{pe } \partial\Omega, \tag{2.27}$$

cu condiţiile iniţiale

$$u^\alpha(0,x) = 0, \quad \dot{u}^\alpha(0,x) = 0, \quad \theta^\alpha(0,x) = 0. \tag{2.28}$$

unde $H^u = \displaystyle\int_\Gamma h^u$ *şi* $H^\theta = \displaystyle\int_\Gamma h^\theta$.

3 Modelul termoelastic într-un mediu cu dublă porozitate cu salt în deplasări şi în temperaturi

În cadrul acestui capitol se studiază din nou problema (2.1)-(2.5) considerată în Capitolul 2 însă de această dată domeniul Ω este ocupat de un mediu cu dublă porozitate similar celui considerat în Capitolul 1. Aşa cum era de aşteptat, rezultatele obţinute aici sunt o combinaţie între cele obţinute în omogenizarea problemei elastice într-un mediu cu dublă porozitate, din Capitolul 1, şi rezultatele care se obţin la omogenizarea unei probleme de difuzie formulată într-un domeniu ce ocupă un mediu clasic. Ca şi în Capitolul 1, este interesant de observat faptul că tensorii A^2 şi B^2, deşi nu îşi fac simţită prezenţa în problema omogenizată, ei apar în cadrul limitei şirului $\tilde{u}^{2\varepsilon}$ prin intermediul a doi termeni ξ^l, respectiv ζ care fac parte din componenţa limitei respective.

În cele ce urmează vom folosi aceleaşi notaţii ca în Capitolul 2 iar coeficienţii problemei vor avea aceleaşi proprietăţi. Spre deosebire de capitolul precedent vom considera că $A^{2\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 A^2(x/\varepsilon)$, şi $\rho^{2\varepsilon}(x) = \varepsilon\rho^2(x/\varepsilon)$. Spaţiul $\mathcal{W}_\varepsilon$ reprezintă de această dată completarea lui W_ε în norma $\|\cdot\|$ generată de produsul scalar

$$\begin{aligned}(U,V)_{W_\varepsilon} = \;& \int_0^T\!\!\int_{\Omega_1^\varepsilon} e_{ij}(u^1)e_{ij}(v^1) + \varepsilon^2 \int_0^T\!\!\int_{\Omega_2^\varepsilon} e_{ij}(u^2)e_{ij}(v^2) + \sum_{\alpha=1,2}\left[\int_0^T\!\!\int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} \dot{u}_i^\alpha \dot{v}_i^\alpha + \theta^\alpha w^\alpha + \int_0^t \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x_i}\,\mathrm{d}s\right] + \\ & +\varepsilon \int_0^T\!\!\int_{\Gamma_\varepsilon} (u_i^2 - u_i^1)(v_i^2 - v_i^1) + \varepsilon \int_0^T\!\!\int_{\Gamma_\varepsilon}\int_0^t (\theta^2-\theta^1)(w^2-w^1)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.1}$$

iar formele $\mathcal{L}_\varepsilon$ şi $\mathcal{D}_\varepsilon$ încă se pot prelungi prin continuitate la spaţiile $\mathcal{W}_\varepsilon \times \mathcal{W}_\varepsilon$, respectiv $\Big(L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)\Big) \times \mathcal{W}_\varepsilon$.

Teorema 3.1. *Există o constantă $C > 0$, independentă de ε pentru care:*

$$\|u_i^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega_{T\alpha}^\varepsilon)} \leqslant C, \quad \|\dot{u}_i^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega_{T\alpha}^\varepsilon)} \leqslant C, \quad \|\nabla u_i^{1\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_{T1}^\varepsilon)} \leqslant C, \quad \varepsilon\|\nabla u_i^{2\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_{T2}^\varepsilon)} \leqslant C, \tag{3.2}$$

$$\|\theta^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega_{T\alpha}^\varepsilon)} \leqslant C, \quad \left\|\int_0^t (\nabla\theta^{\varepsilon\alpha})^2\right\|_{L^1(\Omega_{T\alpha}^\varepsilon)} \leqslant C, \tag{3.3}$$

$$\|u_i^{2\varepsilon} - u_i^{1\varepsilon}\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon^T)} \leqslant C\varepsilon^{-1/2}, \quad \left\|\int_0^t \left(\theta^{2\varepsilon} - \theta^{1\varepsilon}\right)^2\right\|_{L^1(\Gamma_\varepsilon^T)} \leqslant C\varepsilon^{-1/2}. \tag{3.4}$$

3.1 Rezultate de omogenizare

Considerăm

$$\begin{aligned} W = \;& H^2(0,T;H_0^1(\Omega))^N \times L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1_{per}(Y_1))^N \times L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1(Y_2)))^N \times \\ & \times H^1(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1_{per}(Y_1)) \times H^1(0,T;L^2(\Omega)),\end{aligned} \tag{3.5}$$

Teorema 3.2. *Dacă $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \in \mathcal{W}_\varepsilon$ este soluţia problemei (2.1)-(2.6), cu $A^{1\varepsilon}(x) = A^1(x/\varepsilon)$, $A^{2\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 A^2(x/\varepsilon)$, $\rho^{1\varepsilon}(x) = \rho^1(x/\varepsilon)$ şi $\rho^{2\varepsilon}(x) = \varepsilon\rho^2(x/\varepsilon)$ unde $u^\varepsilon = (u^{1\varepsilon}, u^{2\varepsilon})$ şi $\theta^\varepsilon = (\theta^{1\varepsilon}, \theta^{2\varepsilon})$, atunci*

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}^{1\varepsilon} \stackrel{*}{\rightharpoonup} |Y_1|\cdot u^1 \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^N, \\
&\tilde{u}^{2\varepsilon} \stackrel{*}{\rightharpoonup} |Y_2|\cdot \langle\widehat{u}^2\rangle_{Y_2} \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^N, \\
&\tilde{\theta}^{\alpha\varepsilon} \stackrel{*}{\rightharpoonup} |Y_\alpha|\cdot \theta^\alpha \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\
&\mathcal{T}_\alpha^\varepsilon(u^{1\varepsilon}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} u^1 \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1(Y_1)))^N, \\
&\mathcal{T}_\alpha^\varepsilon(u^{2\varepsilon}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} \widehat{u}^2 \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1(Y_2)))^N, \\
&\mathcal{T}_1^\varepsilon(e_{kh}(u^{1\varepsilon})) \stackrel{*}{\rightharpoonup} e_{kh}(u^1) + e^y_{kh}(\widehat{u}^1) \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times Y_1)), \\
&\varepsilon\mathcal{T}_2^\varepsilon(e_{kh}(u^{2\varepsilon})) \stackrel{*}{\rightharpoonup} e^y_{kh}(\widehat{u}^2) \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times Y_2)), \\
&\mathcal{T}_\alpha^\varepsilon(\theta^{\alpha\varepsilon}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} \theta^\alpha \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega;H^1(Y_\alpha))), \\
&\mathcal{T}_1^\varepsilon(\nabla\theta^{1\varepsilon}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} \nabla\theta^1 + \nabla_y\widehat{\theta}^1 \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times Y_1)), \\
&\mathcal{T}_2^\varepsilon(\nabla\theta^{2\varepsilon}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \textit{slab* în} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times Y_2)),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

unde $(u^1, \widehat{u}^1, \widehat{u}^2, \theta^1, \widehat{\theta}^1, \theta^2) \in W$, este soluţia unică a problemei

$$\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1} (t-T)\left[a^1_{ijkh}\Big(e_{kh}(u^1) + e^y_{kh}(\widehat{u}^1)\Big) - b^1_{ij}\theta^1\right]\Big(\dot{e}_{ij}(\varphi^1) + \dot{e}^y_{ij}(\Phi^1)\Big) +$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_2}(t-T)\left[a^2_{ijkh}e^y_{kh}(\widehat{u}^2)-b^2_{ij}\theta^2\right]\dot{e}^y_{ij}(\Phi^2)+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)\rho^1\ddot{u}^1_i\dot{\varphi}^1_i+\\
&+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)b^1_{ij}\Big(\dot{e}_{ij}(u^1)+\dot{e}^y_{ij}(\widehat{u}^1)\Big)q^1+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_2}(t-T)b^2_{ij}\dot{e}^y_{ij}(\widehat{u}^2)q^2+\\
&+\frac{1}{T_0}\sum_{\alpha=1,2}\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_\alpha}(t-T)c^\alpha\dot{\theta}^\alpha q^\alpha+\frac{1}{T_0}\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)k^1_{ij}\Big(\frac{\partial\theta^1}{\partial x_j}+\frac{\partial\widehat{\theta}^1}{\partial y_j}\Big)\Big(\frac{\partial q^1}{\partial x_i}+\frac{\partial Q^1}{\partial y_i}\Big)+\\
&+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times\Gamma}(t-T)\left[h^u(\widehat{u}^2_i-u^1_i)(\dot{\Phi}^2_i-\dot{\varphi}^1_i)+\frac{1}{T_0}h^\theta(\theta^2_i-\theta^1_i)(q^2_i-q^1_i)\right]=\\
&=\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)\Big(f_i\dot{\varphi}^1_i+\frac{1}{T_0}rq^1\Big)+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_2}(t-T)\Big(f_i\dot{\Phi}^2_i+\frac{1}{T_0}rq^2\Big),\\
&\qquad\forall(\varphi^1,\Phi^1,\Phi^2,q^1,Q^1,q^2)\in W.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

În plus, penru aproape orice $x\in\Omega$ avem $u^1(0,x)=0,\quad \dot{u}^1(0,x)=0,\quad \theta^\alpha(0,x)=0.$

Se găsesc expresiile funcţiilor $\widehat{u}^1$, $\widehat{u}^2$, $\widehat{\theta}^1$ astfel că (2.18)-(2.19) încă sunt adevărate, în plus

$$\widehat{u}^2_k(t,x,y)=u^1_k(t,x)+f_l(x)w^l_{2k}(y)+\theta^2(t,x)z^2_k(y). \tag{3.8}$$

unde $z^2, w^l_2\in H^1(Y_2)^N$ sunt soluţiile unice ale problemelor

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big(a^2_{ijkh}\dfrac{\partial w^l_{2k}}{\partial y_h}\Big)=\delta_{il} & \text{în } Y_2\\
a^2_{ijkh}\dfrac{\partial w^l_{2k}}{\partial y_h}n_j=h^u w^l_{2i} & \text{pe } \Gamma,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
-\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big(a^2_{ijkh}\dfrac{\partial z^2_k}{\partial y_h}-b^2_{ij}\Big)=0 & \text{în } Y_2\\
\Big(a^2_{ijkh}\dfrac{\partial z^2_k}{\partial y_h}-b^2_{ij}\Big)n_j=0 & \text{pe } \Gamma.
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

Definim

$$\gamma^{2*}=\int_{Y_2}b^2_{ij}\frac{\partial z^2_i}{\partial y_j} \tag{3.10}$$

şi introducând (2.18), (2.19), (2.20), (3.8) şi (3.10) în problema limită (3.7), obţinem problema omogenizată în Ω. Mai exact, se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 3.3. *Dacă $(u^\varepsilon,\theta^\varepsilon)\in\mathcal{W}_\varepsilon$ este soluţia problemei (2.1)-(2.6) cu $A^{1\varepsilon}(x)=A^1(x/\varepsilon)$, $A^{2\varepsilon}(x)=\varepsilon^2A^2(x/\varepsilon)$, $\rho^{1\varepsilon}(x)=\rho^1(x/\varepsilon)$ şi $\rho^{2\varepsilon}(x)=\varepsilon\rho^2(x/\varepsilon)$, unde $u^\varepsilon=(u^{1\varepsilon},u^{2\varepsilon})$ şi $\theta^\varepsilon=(\theta^{1\varepsilon},\theta^{2\varepsilon})$, atunci avem*

$$\tilde{u}^{1\varepsilon}\overset{*}{\rightharpoonup}|Y_1|\cdot u^1\quad slab*\ \hat{\imath}n\ \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^N, \tag{3.11}$$

$$\tilde{u}^{2\varepsilon}\overset{*}{\rightharpoonup}|Y_2|\cdot u^1+f_l\cdot\xi^l+\theta^2\cdot\zeta\quad slab*\ \hat{\imath}n\ \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^N, \tag{3.12}$$

$$\tilde{\theta}^{\alpha\varepsilon}\overset{*}{\rightharpoonup}|Y_\alpha|\cdot\theta^\alpha\quad slab*\ \hat{\imath}n\ \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\quad\forall\alpha\in\{1,2\}, \tag{3.13}$$

unde (u,θ) cu $u=(u^1,u^2)$ şi $\theta=(\theta^1,\theta^2)$ este soluţia unică a problemei

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a^{1*}_{ijkh}\frac{\partial u^1_k}{\partial x_h}-b^{1*}_{ij}\theta^1\Big)+\langle\rho^1\rangle_{Y_1}\frac{\partial^2u^1_i}{\partial t^2}=f_i\quad \hat{\imath}n\ \Omega, \tag{3.14}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(k^{1*}_{ij}\frac{\partial\theta^1}{\partial x_j}\Big)+T_0b^{1*}_{ij}\frac{\partial e_{ij}(u^1)}{\partial t}+\Big(T_0\gamma^{1*}+\langle c^1\rangle_{Y_1}\Big)\frac{\partial\theta^1}{\partial t}-H^\theta(\theta^2_i-\theta^1_i)=|Y_1|\,r\quad \hat{\imath}n\ \Omega, \tag{3.15}$$

$$\Big(T_0\gamma^{2*}+\langle c^2\rangle_{Y_2}\Big)\frac{\partial\theta^2}{\partial t}+H^\theta(\theta^2_i-\theta^1_i)=|Y_2|\,r\quad \hat{\imath}n\ \Omega, \tag{3.16}$$

$$u^1=0,\quad\theta^1=0\quad pe\ \partial\Omega, \tag{3.17}$$

cu condiţiile iniţiale

$$u^\alpha(0,x)=0,\quad\dot{u}^\alpha(0,x)=0,\quad\theta^\alpha(0,x)=0, \tag{3.18}$$

unde $H^\theta=\int_\Gamma h^\theta$ şi componentele câmpurilor vectoriale ξ^l şi ζ fiind $\xi^l_i=\int_{Y_2}w^l_{2i}$, respectiv $\zeta_i=\int_{Y_2}z^2_i$.

4 Modelul termoelastic într-un mediu cu dublă porozitate cu salt în deplasări şi continuitate în temperaturi

În acest capitol vom schimba condiţia de salt a temperaturii pe interfaţa Γ_ε, din problema studiată în Capitolul 3. Mai exact, pe fiecare dintre componentele Ω_1^ε şi Ω_2^ε ale domeniului Ω ce ocupă un mediu cu dublă porozitate, vom considera ecuaţiile

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_j} + \rho^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial^2 u_i^{\alpha\varepsilon}}{\partial t^2} = f_i \tag{4.1}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial \theta^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_j}\right) + T_0 b_{ij}^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial e_{ij}(u^{\alpha\varepsilon})}{\partial t} + c^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial \theta^{\alpha\varepsilon}}{\partial t} = r \tag{4.2}$$

alături de condiţiile pe interfaţa Γ_ε, respectiv $\partial\Omega$

$$\sigma_{ij}^{1\varepsilon} n_j = \sigma_{ij}^{2\varepsilon} n_j = \varepsilon h_\varepsilon^u (u_i^{2\varepsilon} - u_i^{1\varepsilon}) \quad \text{pe } \Gamma_\varepsilon, \tag{4.3}$$

$$k_{ij}^{1\varepsilon}\frac{\partial \theta^{1\varepsilon}}{\partial x_j} n_i = k_{ij}^{2\varepsilon}\frac{\partial \theta^{2\varepsilon}}{\partial x_j} n_i \quad \text{pe } \Gamma_\varepsilon, \tag{4.4}$$

$$\theta^{1\varepsilon} = \theta^{2\varepsilon} \quad \text{pe } \Gamma_\varepsilon, \tag{4.5}$$

$$u^{1\varepsilon} = 0, \quad \theta^{1\varepsilon} = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega, \tag{4.6}$$

şi condiţiile iniţiale

$$u^{\alpha\varepsilon}(0,x) = 0, \quad \dot{u}^{\alpha\varepsilon}(0,x) = 0, \quad \theta^{\alpha\varepsilon}(0,x) = 0. \tag{4.7}$$

Ca şi în Capitolul 3 vom considera că

$$A^{1\varepsilon}(x) = A^1(x/\varepsilon), \qquad A^{2\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 A^2(x/\varepsilon), \qquad B^{1\varepsilon}(x) = B^1(x/\varepsilon, \qquad B^{2\varepsilon}(x) = \varepsilon B^2(x/\varepsilon),$$
$$\rho^{1\varepsilon}(x) = \rho^1(x/\varepsilon), \qquad \rho^{2\varepsilon}(x) = \varepsilon\rho^2(x/\varepsilon), \qquad K^{\alpha\varepsilon}(x) = K^\alpha(x/\varepsilon), \qquad c^{\alpha\varepsilon}(x) = c^\alpha(x/\varepsilon).$$

Spaţiul funcţional folosit în cadrul acestui capitol va fi de asemenea spaţiul W_ε definit in Capitolul 2 de (2.7) iar formularea variaţională a problemei (4.1)-(4.7) este:

Să se găsească $U^\varepsilon = (u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \in W_\varepsilon$ astfel încât

$$\mathcal{L}_\varepsilon(U^\varepsilon, V) = \mathcal{D}_\varepsilon\left((f,r), V\right), \ \forall V = (v,w) \in W_\varepsilon, \tag{4.8}$$

unde, pentru fiecare ε, forma biliniară $\mathcal{L}_\varepsilon : W_\varepsilon \times W_\varepsilon \to \mathbb{R}$ este definită de această dată prin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon(U,V) = & \sum_{\alpha=1,2}\Bigg[\int_0^T\!\!\int_{\Omega_\alpha^\varepsilon}(t-T)\Big(\left(-a_{ijkh}^{\alpha\varepsilon}e_{kh}(u^\alpha) + b_{ij}^{\alpha\varepsilon}\theta^\alpha\right)e_{ij}(\dot{v}^\alpha) + \rho^{\alpha\varepsilon}\dot{u}_i^\alpha\ddot{v}_i^\alpha + +b_{ij}^{\alpha\varepsilon}e_{ij}(u^\alpha)\dot{w}^\alpha + \\ & +\frac{1}{T_0}c^{\alpha\varepsilon}\theta^\alpha\dot{w}^\alpha\Big) + \rho^{\alpha\varepsilon}\dot{u}_i^\alpha\dot{v}_i^\alpha + b_{ij}^{\alpha\varepsilon}e_{ij}(u^\alpha)w^\alpha + \frac{1}{T_0}c^{\alpha\varepsilon}\theta^\alpha w^\alpha + \frac{1}{T_0}\int_0^t k_{ij}^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x_i}\,\mathrm{d}s\Bigg] - \\ & -\varepsilon\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_\varepsilon}(t-T)h_\varepsilon^u(u_i^2 - u_i^1)(\dot{v}_i^2 - \dot{v}_i^1),\end{aligned} \tag{4.9}$$

iar $\mathcal{D}_\varepsilon : \left(L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)\right) \times W_\varepsilon \to \mathbb{R}$ este dată de (2.10). Spaţiul $\mathcal{W}_\varepsilon$ se construieşte prin completarea lui W_ε în norma genrată de produsul scalar

$$\begin{aligned}(U,V)_{W_\varepsilon} = & \int_0^T\!\!\int_{\Omega_1^\varepsilon} e_{ij}(u^1)e_{ij}(v^1) + \varepsilon^2\int_0^T\!\!\int_{\Omega_2^\varepsilon} e_{ij}(u^2)e_{ij}(v^2) + \\ & + \sum_{\alpha=1,2}\left[\int_0^T\!\!\int_{\Omega_\alpha^\varepsilon}\dot{u}_i^\alpha\dot{v}_i^\alpha + \theta^\alpha w^\alpha + \int_0^t \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x_i}\,\mathrm{d}s\right] + \varepsilon\int_0^T\!\!\int_{\Gamma_\varepsilon}(u_i^2 - u_i^1)(v_i^2 - v_i^1).\end{aligned} \tag{4.10}$$

şi din nou, formele $\mathcal{L}_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ şi $\mathcal{D}_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ pot fi prelungite prin continuitate la $\mathcal{W}_\varepsilon \times \mathcal{W}_\varepsilon$, respectiv la $\left(L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)\right) \times \mathcal{W}_\varepsilon$.

Teorema 4.1. *Problema (4.8) are soluţie şi aceasta este unică. Mai mult, există o constantă $C > 0$, independentă de ε, pentru care:*

$$\|u_i^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega_{T\alpha}^\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \|\dot{u}_i^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega_{T\alpha}^\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \|\nabla u_i^{\alpha\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_{T\alpha}^\varepsilon)} \leqslant C, \tag{4.11}$$

$$\|\theta^{\varepsilon\alpha}\|_{L^2(\Omega_{T\alpha}^\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \left\|\int_0^t (\nabla\theta^{\varepsilon\alpha})^2\right\|_{L^1(\Omega_{T\alpha}^\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \|u_i^{2\varepsilon} - u_i^{1\varepsilon}\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon^T)} \leqslant C\varepsilon^{-1/2}. \tag{4.12}$$

4.1 Rezultate de omogenizare

Teorema 4.2. *Dacă* $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \in \mathcal{W}_\varepsilon$ *este soluţia problemei* (4.1)-(4.7), *unde* $u^\varepsilon = (u^{1\varepsilon}, u^{2\varepsilon})$ *şi* $\theta^\varepsilon = (\theta^{1\varepsilon}, \theta^{2\varepsilon})$, *atunci au loc convergenţele* (3.6) *unde* $(u^1, \widehat{u}^1, \widehat{u}^2, \theta^1, \widehat{\theta}^1, \theta^2) \in W$ *definit de* (3.5), *este soluţia unică a problemei*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)\left[a^1_{ijkh}\Big(e_{kh}(u^1)+e^y_{kh}(\widehat{u}^1)\Big)-b^1_{ij}\theta^1\right]\Big(\dot{e}_{ij}(\varphi^1)+\dot{e}^y_{ij}(\Phi^1)\Big)+\\
&+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_2}(t-T)\left[a^2_{ijkh}e^y_{kh}(\widehat{u}^2)-b^2_{ij}\theta^2\right]\dot{e}^y_{ij}(\Phi^2)+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)\rho^1\ddot{u}^1_i\dot{\varphi}^1_i+\\
&+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)b^1_{ij}\Big(\dot{e}_{ij}(u^1)+\dot{e}^y_{ij}(\widehat{u}^1)\Big)q^1+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_2}(t-T)b^2_{ij}\dot{e}^y_{ij}(\widehat{u}^2)q^2+\\
&+\frac{1}{T_0}\sum_{\alpha=1,2}\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_\alpha}(t-T)c^\alpha\dot{\theta}^\alpha q^\alpha+\frac{1}{T_0}\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)k^1_{ij}\Big(\frac{\partial\theta^1}{\partial x_j}+\frac{\partial\widehat{\theta}^1}{\partial y_j}\Big)\Big(\frac{\partial q^1}{\partial x_i}+\frac{\partial Q^1}{\partial y_i}\Big)+\\
&+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times\Gamma}(t-T)h^u(\widehat{u}^2_i-u^1_i)(\dot{\Phi}^2_i-\dot{\varphi}^1_i)=\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_1}(t-T)\Big(f_i\dot{\varphi}^1_i+\frac{1}{T_0}rq^1\Big)+\int_0^T\!\!\int_{\Omega\times Y_2}(t-T)\Big(f_i\dot{\Phi}^2_i+\frac{1}{T_0}rq^2\Big),\\
&\forall(\varphi^1,\Phi^1,\Phi^2,q^1,Q^1,q^2)\in W.
\end{aligned}\tag{4.13}$$

În plus, pentru aproape orice $x \in \Omega$ *avem*

$$u^1(0,x)=0,\quad \dot{u}^1(0,x)=0,\quad \theta^\alpha(0,x)=0.\tag{4.14}$$

Se arată că expresiile (2.18), (2.19), (3.8) ale funcţiilor $\widehat{u}^1$, $\widehat{\theta}^1$, respectiv $\widehat{u}^2$ sunt valabile şi în acest caz şi introducându-le în problema limită (4.13) se obţine problema omogenizată în Ω.

Teorema 4.3. *Dacă* $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \in \mathcal{W}_\varepsilon$ *este soluţia problemei* (4.1)-(4.7), *unde* $u^\varepsilon = (u^{1\varepsilon}, u^{2\varepsilon})$ *şi* $\theta^\varepsilon = (\theta^{1\varepsilon}, \theta^{2\varepsilon})$, *atunci avem*

$$\tilde{u}^{1\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} |Y_1|\cdot u^1 \quad slab* \text{ în } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^N,\tag{4.15}$$

$$\tilde{u}^{2\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} |Y_2|\cdot u^1 + f_l\cdot\xi^l + \theta^2\cdot\zeta \quad slab* \text{ în } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^N,\tag{4.16}$$

$$\tilde{\theta}^{\alpha\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} |Y_\alpha|\cdot\theta^\alpha \ slab* \text{ în } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\quad \forall\alpha\in\{1,2\},\tag{4.17}$$

unde (u,θ) *cu* $u=(u^1,u^2)$ *şi* $\theta=(\theta^1,\theta^2)$ *este soluţia unică a problemei*

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a^{1*}_{ijkh}\frac{\partial u^1_k}{\partial x_h}-b^{1*}_{ij}\theta^1\Big)+\langle\rho^1\rangle_{Y_1}\frac{\partial^2u^1_i}{\partial t^2}=f_i \quad \text{în } \Omega,\tag{4.18}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(k^{1*}_{ij}\frac{\partial\theta^1}{\partial x_j}\Big)+T_0b^{1*}_{ij}\frac{\partial e_{ij}(u^1)}{\partial t}+\Big(T_0\gamma^{1*}+\langle c^1\rangle_{Y_1}\Big)\frac{\partial\theta^1}{\partial t}=|Y_1|\,r \quad \text{în } \Omega,\tag{4.19}$$

$$\Big(T_0\gamma^{2*}+\langle c^2\rangle_{Y_2}\Big)\frac{\partial\theta^2}{\partial t}=|Y_2|\,r \quad \text{în } \Omega,\tag{4.20}$$

$$u^1=0,\quad \theta^1=0,\quad \text{pe } \partial\Omega,\tag{4.21}$$

cu condiţiile iniţiale

$$u^\alpha(0,x)=0,\quad \dot{u}^\alpha(0,x)=0,\quad \theta^\alpha(0,x)=0,\tag{4.22}$$

unde componentele câmpurilor vectoriale ξ^l *şi* ζ *sunt* $\xi^l_i=\int_{Y_2}w^l_{2i}$, *respectiv* $\zeta_i=\int_{Y_2}z^2_i$.

Această lucrare a fost realizată în cadrul proiectului "Doctoratul în Ştiinţe fundamentale - Începutul unei cariere de vârf în cercetare", cofinanţat de Uniunea Europeană şi Guvernul României prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, contractul de finanţare nr. POSDRU/107/1.5/S/82514.

Bibliografie

[1] Allaire G., *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal., 23.6:1482-1518 (1992)

[2] Alves M.S., Muñoz Rivera J.E., Sepúlveda M., Villagrán O.V., *Transmission Problem in Thermoelasticity*, Boundary Value Problems, 2011:190548 (2011)

[3] Auriault J.L. and Ene H.I., *Macroscopic modelling of heat transfer in composites with interfacial thermal barrier*, Int. J. Heat Mass Transfer, 37, No. 18, 2885-2892 (1994)

[4] Ciarlet Ph.G., *An introduction to differential geometry with applications to elasticity*, Reprinted from J. Elasticity 78/79 (2005), no. 1-3 [MR2196098], Springer, Dordrecht (2005)

[5] Cioranescu D., Damlamian A. and Griso G., *Periodic unfolding and homogenization*, C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 335, 99-104 (2002)

[6] Cioranescu D., Damlamian A. and Griso G., *The periodic unfolding method in homogenization*, SIAM J. Math. Anal. 40, No. 4, 1585-1620 (2008)

[7] Cioranescu D., Damlamian A., Donato P., Griso G. and Zaki R., *The periodic unfolding method in domains with holes*, SIAM J. Math. Anal. 44, No. 2, 718-760 (2012)

[8] Cioranescu D., Damlamian A., Orlik J., *Homogenization via unfolding in periodic elasticity with contact on closed and open cracks*, Asymptot. Anal. 82(3-4), 201-232 (2013)

[9] Cioranescu D., Donato P. and Zaki R., *The periodic unfolding method in perforated domains*, Port. Math. (N.S.) 63, No. 4, 467-496 (2006)

[10] D. Cioranescu and P. Donato, An Introduction to Homogenization, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 17 (1999)

[11] Cioranescu D. and Saint Jean-Paulin J., *Homogenization in open sets with holes*, J. Math. Anal. Appl., 71, 590-607 (1979)

[12] Donato P., Le Nguyen K. H. and Tardieu R., *The periodic unfolding method for a class of imperfect transmission problems*, J. Math. Sci. (N. Y.) 176, no. 6, 891-927 (2011)

[13] Donato P. and Monsurrò S., *Homogenization of two heat conductors with an interfacial contact resistance*, Analysis and Applications, Vol. 2, No. 3, 247273 (2004)

[14] Donato P. and Ţenţea I., *Homogenization of an elastic double-porosity medium with imperfect interface via the periodic unfolding method*, Boundary Value Problems, 2013:265 (2013)

[15] Donato P. and Yang Z., *The periodic unfolding method for the wave equation in domains with holes*, Adv. Math. Sci. Appl. 22, No. 2, 521-551 (2012).

[16] Duvaut G., *Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus. Applications à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique, homogénéisation, in Theoretical and Applied Mechanics*, ed. W. T. Koiter, North Holland, Amsterdam, (1978)

[17] Duvaut G. and Lions J-L., *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, 1972

[18] Ene H.I., *On the microstructure models of porous media*, Rev. Rouma. Math. Pures Appl., 46, No. 2-3, 289-295 (2001)

[19] Ene H.I. şi Paşa G., *Metoda omogenizării. Aplicaţii la teoria materialelor compozite*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti (1987)

[20] Ene H.I. and Poliševski D., *Model of diffusion in partially fissured media*, Z. Angew. Math. Phys. 53, No. 6, 1052-1059 (2002)

[21] Ene H.I. and Timofte C., *Microstructure models for composites with imperfect interface via the periodic unfolding method*, Asymptotic Analysis, DOI 10.3233/ASY-141239 (2014)

[22] Ene H.I., Timofte C. and Ţenţea I., *Homogenization of a thermoelasticity model with imperfect interface*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, [Submitted]

[23] Francfort G.A., *Homogenization and Linear Thermoelasticity*, SIAM J. Math. Anal., 14(4), 696?708 (1983)

[24] Hlaváěk I. and Nečas J., *On inequalities of Korn's type*, Arch. Rational Mech. Anal., 36, 113-120 (1970)

[25] Ieşan D., *Teoria termoelasticităţii*, Ed. Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti (1979)

[26] Kristaly A., Radulescu V., Varga C., *Variational principles in mathematical physics, geometry, and economics. Qualitative analysis of nonlinear equations and unilateral problems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 136, Cambridge University Press, Cambridge (2010)

[27] Léné F., *Comportement macroscopique de matériaux élastiques comportant des inclusions rigides ou des trous répartis périodiquement.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, I, 292:75-78, (1981)

[28] Monsurrò S., *Homogenization of a two-component composite with interfacial thermal barrier*, Adv. Math. Sci. Appl. 13, no. 1, 43-63 (2003)

[29] Nguetseng G., *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal. 20, 608-629 (1989)

[30] Oleinik O.A., Shamaev A.S. and Yosifian G.A., *Mathematical problems in elasticity and homogenization* North-Holland, (1992)

[31] Orlik J., *Two-scale homogenization in transmission problems of elasticity with interface jumps*, Applicable Analysis: An International Journal, 91:7, 1299-1319 (2012).

[32] Poliševski D., *The regularized diffusion in partially fractured media*, Current Topics in Continuum Mechanics, Ed. Academiei (Romania), 106-116 (2003)

[33] Sanchez-Palencia E., *Non homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, 127, Springer-Verlag, (1980)

[34] Smyshlyaev V.P., *Propagation and localization of elastic waves in highly anisotropic periodic composites via two-scale homogenization*, Mechanics of Materials, 41, 434-447 (2009)

[35] Sobolev S.L., *Some Applications of functional analysis in mathematical physics*, Leningrad (1950), Translated by F. Browder; Providence A.M.S. (1963)

[36] Timofte C., *Multiscale analysis of diffusion processes in composite media*, Computers and Mathematics with Applications, Volume 66, Issue 9, pp. 1573-1580 (2013)

[37] Timofte C., *Multiscale modeling of heat transfer in composite materials*, Romanian Journal of Physics, Vol. 58, Nos. 9-10, pp. 1418-1427 (2013)

[38] Yang Z., *Homogenization and correctors for the hyperbolic problems with imperfect interfaces via periodic unfloding method*, Comunications on Pure and Applied Analysis, Volume 13, Number 1, pp. 249-272 (2014)